

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΩΝ ΕΝΤΟΠΙΣΜΕΝΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΣΕ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΚΛΗΡΟΥ ΚΑΙ ΜΑΛΑΚΟΥ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ

Παναγιώτης Παναγόπουλος^(*a*), Τάσος Μπούνης^(*b*) και Χαράλαμπος Σκόκος^(*b*)

^(*a*) Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Πολυτεχνειούπολη, Αθήνα.

^(*b*) Τμήμα Μαθηματικών και Κέντρο Έρευνας και Εφαρμογών Μη Γραμμικών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πάτρας, 26500 Πάτρα.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιούμε την μέθοδο των ομοκλινικών τροχιών για την μελέτη της ύπαρξης και ευστάθειας των **διακριτών πνοών (breathers)**, δηλ. χωρικά εντοπισμένων και χρονικά περιοδικών ταλαντώσεων σε μια κλάση μονοδιάστατων (1D) μη γραμμικών πλεγμάτων. Ο εντοπισμός μπορεί να είναι σε ένα ή σε πολλά πλεγματικά σημεία και τα 1D πλέγματα που μελετούμε στην εργασία έχουν γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ πλησιέστερων γειτόνων και δυναμικό πλεγματικού σημείου της μορφής:

$$V(u) = \frac{1}{2}Ku^2 \pm \frac{1}{4}u^4$$

όπου το πρόσημο (+) αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση “σκληρού ελατηρίου” και το πρόσημο (-) στην αλληλεπίδραση “μαλακού ελατηρίου”. Αυτές οι εντοπισμένες ταλαντώσεις – όταν είναι ευσταθείς για μικρές διαταραχές – έχουν ιδιαίτερη σημασία για τα φυσικά συστήματα διότι επιδρούν δραστικά στις ιδιότητες της μεταφοράς ενέργειας του πλέγματος [1,2]. Διακριτές πνοές έχουν δημιουργηθεί και παρατηρηθεί σε πολλά πειράματα, όπως σε παρατάξεις (arrays) επαφών Josephson [3,4], οπτικούς κυματοδηγούς [5] και σε επιφάνειες χαμηλής διάστασης [6]. Αφού κατασκευάσουμε τέτοιες εντοπισμένες ταλαντώσεις, χρησιμοποιούμε θεωρία Floquet για να μελετήσουμε την **γραμμική (τοπική) ευστάθεια** τους, κατα μήκος συγκεκριμένων καμπυλών του παραμετρικού χώρου (α, ω), όπου α είναι η σταθερά αλληλεπίδρασης μεταξύ πλησιέστερων γειτόνων και ω η συχνότητα των πνοών. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την μέθοδο του μικρότερου δείκτη ευθυγράμμισης (Smaller Alignment Index - SALI) [7 - 11] για να ερευνήσουμε τις ιδιότητες ευστάθειας πιο **συνολικά** στο χώρο των φάσεων. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα για τις \pm περιπτώσεις του $V(u)$, βρίσκουμε ότι οι **περιοχές ύπαρξης και ευστάθειας** των πνοών σε πλέγμα με “**σκληρά ελατήρια**” είναι σαφώς μεγαλύτερες από αυτές σε σύστημα με “**μαλακά ελατήρια**”. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι οι συνθήκες για **συντονισμούς** μεταξύ των πνοών και των γραμμικών τρόπων είναι λιγότερο περιοριστικές στην πρώτη περίπτωση από ότι στην δεύτερη. Επιπλέον, οι ιδιότητες των διακλαδώσεων είναι διαφορετικές για τις δύο περιπτώσεις. Για παράδειγμα, το φαινόμενο της **μιγαδικής αστάθειας**, παρατηρήθηκε μόνο σε σύστημα με δυναμικό “μαλακού ελατηρίου”, δημιουργώντας αστάθεια στις πνοές χωρίς να δημιουργεί νέες, ενώ το σύστημα με “σκληρά ελατήρια” παρουσιάζει καμπύλες του παραμετρικού χώρου κατά μήκος των οποίων ο αριθμός των ιδιοτιμών του μονόδρομου πίνακα που βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο είναι σταθερός και έτσι οι πνοές διατηρούν τον χαρακτήρα της ευστάθειάς τους. Στην εργασία [12] παρουσιάζουμε μια λεπτομερέστερη μελέτη του προβλήματος που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία.

1. Εισαγωγή

Θεωρούμε μονοδιάστατο (1D) πλέγμα που περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{u}_n + V'(u_n) = a(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad , \quad -\infty < n < +\infty \quad , \tag{1}$$

όπου $u_n(t)$ είναι η μετατόπιση του n -στου πλεγματικού σημείου, a η παράμετρος σύζευξης και $V(u)$ το δυναμικό πλεγματικού σημείου που έχει την παρακάτω μορφή:

$$V(u) = \frac{1}{2}Ku^2 \pm \frac{1}{4}u^4 \quad , \tag{2}$$

όπου $K > 0$ είναι μία σταθερή παράμετρος. Οι τελείες συμβολίζουν παραγωγή ως προς χρόνο και ο τόνος παραγωγή ως προς το όρισμα. Οι εξισώσεις (1) περιγράφουν τη δυναμική μιας άπειρης αλυσίδας ταλαντωτών, στην οποία ο καθένας δέχεται γραμμικές δυνάμεις Hooke από τους δύο πλησιέστερους γείτονες και πεδιακή δύναμη με δυναμικό V που παράγει ένα κατάλληλο “υπόστρωμα”. Το πρόσημο (+) στην Εξ. (2) σημαίνει ότι τα σωματίδια αλληλεπιδρούν με το υπόστρωμα με δυνάμεις “σκληρού ελατηρίου”, ενώ το πρόσημο (-) αναφέρεται στη περίπτωση του “μαλακού ελατηρίου”. Από τη δημοσίευση του σημαντικού άρθρου των MacKay και Aubry το 1994 [13], στο οποίο έχει θεμελιωθεί αυστηρά η ύπαρξη των χωρικά εντοπισμένων, χρονικά περιοδικών λύσεων (γνωστών ως **discrete breathers**, στα Ελληνικά: **διακριτές πνοές**) σε συστήματα όμοια με το (1), η βιβλιογραφία έχει εμπλουτισθεί με πολλά αποτελέσματα, σχετικά με τις ιδιότητες αυτών των λύσεων (βλ. [1,2,14,15]). Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι υπολογισμού, σε κάθε επιθυμητή “**αριθμητική ακρίβεια**”, των λύσεων τύπου διακριτών πνοών σε σύστημα της μορφής (1) με δυναμικό πλεγματικού σημείου (2). Με τον όρο “**αριθμητικά ακριβής**” διακριτή πνοή, εννοούμε μία λύση, η οποία είναι χωρικά εντοπισμένη και χρονικά περιοδική σε πλέγμα N σωματιδίων και η οποία διατηρείται αναλλοίωτη καθώς το N αυξάνει. Στη παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε την πρόσφατη μέθοδο **ομοκλινικών τροχιών αντιστρεπτών απεικονίσεων** [16-19], η οποία εφαρμόζεται ανεξάρτητα της τιμής της παραμέτρου σύζευξης a στον χώρο Fourier και δίνει πολύ καλές προσεγγίσεις για τις αρχικές συνθήκες των διακριτών πνοών. Στη συνέχεια με τη χρήση ενός κατάλληλου αλγορίθμου Newton που αναπτύξαμε, κατασκευάζουμε τις “αριθμητικά ακριβείς” διακριτές πνοές με την επιθυμητή ακρίβεια.

2. Μέθοδος Ομοκλινικών Τροχιών

Εφόσον οι λύσεις τύπου διακριτών πνοών της Εξ. (1) είναι χρονικά περιοδική με περίοδο T και συχνότητα $\omega = 2\pi/T$, μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier

$$u_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_n(k) \exp(ik\omega t) \quad , \tag{3}$$

$$A_n(k) = A_n^*(-k). \quad (4)$$

Λογω της συμμετρίας του δυναμικού (2) ισχύει ότι μόνον οι τρόποι ταλάντωσης με περιττό δείκτη k είναι μη-μηδενικοί και ότι οι ταλαντώσεις έχουν μηδενική μέση μετατόπιση. Για αυτό το λόγο απαιτούμε $A_n(0) = 0$. Επιπλέον τα σωματίδια ταλαντώνονται σε φάση, έτσι θεωρούμε τα $A_n(k)$ πραγματικούς αριθμούς. Για τη περίπτωση “σκληρού ελατηρίου” η μέθοδος αναπτύσσεται στη βιβλιογραφία [16-19]. Στην παρούσα εργασία, εφαρμόζουμε τη μέθοδο για δυναμικό “μαλακού ελατηρίου”

$$V(u) = \frac{1}{2}Ku^2 - \frac{1}{2}u^4. \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3) στις εξισώσεις κίνησης (1) και εξισώνοντας τους συντελεστές του $\exp(ik\omega t)$ για κάθε k , καταλήγουμε στο παρακάτω αλγεβρικό σύστημα για τα $A_n(k)$:

$$A_{n+1}(k) + A_{n-1}(k) = C(k)A_n(k) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} A_n(k_1)A_n(k_2)A_n(k_3), \quad (6)$$

όπου $k_1 + k_2 + k_3 = k$ και

$$C(k) = \left(2 + \frac{K - k^2\omega^2}{\alpha} \right). \quad (7)$$

Η αναδρομική σχέση (6) είναι μία απειροδιάστατη απεικόνιση των $A_n(k)$ με τον δείκτη πλεγματικού σημείου n σαν παράμετρο επανάληψης. Ο χωρικός εντοπισμός απαιτεί ότι $A_n(k) \rightarrow 0$ για $\|n\| \rightarrow \infty$. Έτσι μια πνοή είναι μια **ομοκλινική τροχιά** στο χώρο των συντελεστών Fourier, δηλαδή μια διπλά άπειρη ακολουθία σημείων που ξεκινά από το 0 για $n \rightarrow -\infty$ και τελειώνει στο 0 για $n \rightarrow +\infty$. Για να εργαστούμε όμως με οποιαδήποτε αριθμητική μέθοδο οφείλουμε να περιοριστούμε σε ένα πεπερασμένο υπόχωρο του χώρου συντελεστών Fourier με δείκτες (n, k) . Εάν θεωρήσουμε M αρμονικούς όρους της σειράς Fourier στην Εξ. (3), δηλαδή $k=1, 3, \dots, 2M+1$, για $(-\infty < n < +\infty)$, τότε η Εξ. (6) αναπαριστά μια απεικόνιση $2M$ -διαστάσεων, όπου και οι λύσεις τύπου διακριτών πνοών υπάρχουν στη γειτονιά της τετριμμένης λύσης ($A_n(k) = 0$, για όλα τα n, k), με τη προϋπόθεση ότι αυτή η λύση είναι υπερβολική δηλαδή η τετριμμένη λύση είναι ένα **σαγματικό σημείο** της απεικόνισης. Για να εξετάσουμε εάν το σημείο ($A_n(k) = 0$, για όλα τα n, k) είναι υπερβολικό και να προσδιορίσουμε τις διαστάσεις της ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας, γραμμικοποιούμε την απεικόνιση της Εξ. (6) στη περιοχή του σημείου. Η απαίτηση να είναι το σταθερό σημείο ($A_n(k) = 0$, για όλα τα n, k) της απεικόνισης υπερβολικό, συνεπάγεται ότι η βασική συχνότητα της διακριτής πνοής:

$$\omega = \sqrt{K - \alpha(C(1) - 2)}, \quad (8)$$

και όλες οι αρμονικές της πρέπει να είναι **εκτός της ζώνης των φωνονίων**, δηλαδή ότι

$$\omega < \sqrt{K} \quad \eta \quad \omega > \sqrt{K + 4\alpha}. \quad (9)$$

Για συστήματα της μορφής (1) με δυναμικό “μαλακού ελατηρίου” η **βασική συχνότητα** έχει τιμή **μικρότερη** των συχνοτήτων των **φωνονίων**, ενώ συστήματα με δυναμικό “σκληρού ελατηρίου” η **βασική συχνότητα** έχει τιμή **μεγαλύτερη** των συχνοτήτων των **φωνονίων**. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε την απλούστερη δυνατή προσέγγιση, για την οποία η σειρά Fourier (3) αποτελείται από ένα μόνον όρο, δηλαδή

$$u_n^{(0)}(t) = 2A_n(1) \cos \omega t, \quad -\infty < n < +\infty. \quad (10)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (10) στην Εξ. (1), με χρήση της Εξ. (5) και του μετασχηματισμού για τον συντελεστή Fourier

$$A_n(1) = \sqrt{\alpha} A_n, \quad (11)$$

καταλήγουμε στην **2 – διάστατη (2D) αντιστρεπτή απεικόνιση**:

$$A_{n+1} + A_{n-1} + C(1)A_n = -3A_n^3, \quad (12)$$

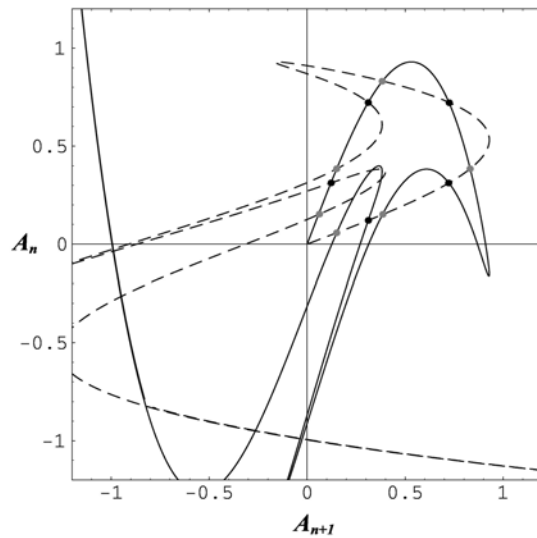
Μια λύση της απεικόνισης (12) ονομάζεται τροχιά της απεικόνισης. Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας σε **ομοκλινικές τροχιές**, δηλαδή τροχιές που συνδέουν το **σαγματικό σημείο** (0,0) της απεικόνισης με τον εαυτό του. Μια ομοκλινική τροχιά αποτελείται από σημεία του επιπέδου (A_{n+1}, A_n) , τα οποία ανήκουν στη τομή της ευσταθούς πολλαπλότητας με την ασταθή πολλαπλότητα του **σαγματικού σημείου** της απεικόνισης. Στο Σχ. 1 έχουμε σχεδιάσει στο επίπεδο (A_{n+1}, A_n) την ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα του **σαγματικού σημείου** (0,0) της 2 – διάστατης απεικόνισης (12) για $C(1) = 3$ [12].

3. Τοπική (γραμμική) και Ολική Ευστάθεια των Διακριτών Πνοών

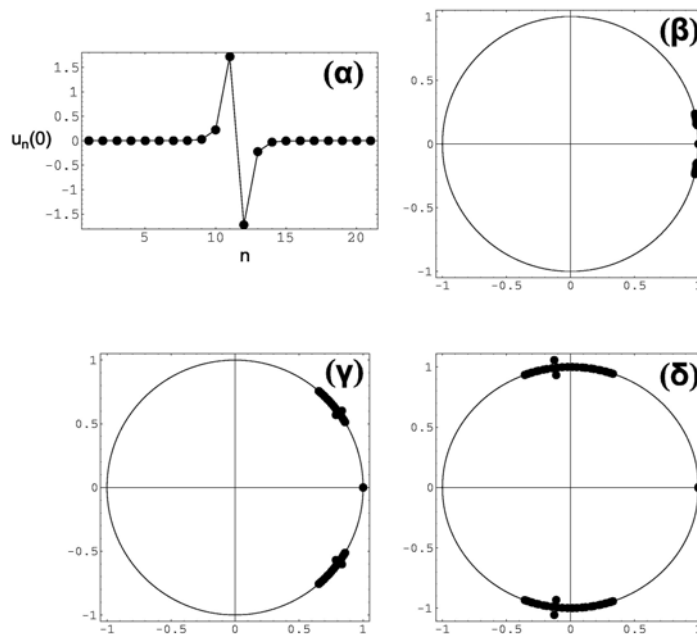
Μια περιοδική λύση $\{u_n(t)\}$ της Εξ. (1) με δυναμικό πλεγματικού σημείου (5) ονομάζεται **γραμμικά ευσταθής** όταν όλες οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα βρίσκονται επί του μοναδιαίου κύκλου. Όταν κάποιες ιδιοτιμές βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου τότε η αντίστοιχη περιοδική λύση ονομάζεται **γραμμικά ασταθής** [12,15]. Με τη μέθοδο των ομοκλινικών τροχιών κατασκευάσαμε ένα πλήθος λύσεων τύπου διακριτών πνοών της Εξ. (1) με δυναμικό “μαλακού ελατηρίου” (5) και μελετήσαμε τα χαρακτηριστικά της γραμμικής ευστάθειας [12].

Για τη μελέτη της ολικής ευστάθειας των ευσταθών πνοών στις περιπτώσεις του “σκληρού” και του “μαλακού ελατηρίου” χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο του μικρότερου δείκτη ευθυγράμμισης (Smaller Alignment Index - SALI). Ο δείκτης SALI εισήχθη από τον Skokos [7] και εφαρμόστηκε επιτυχώς στη μελέτη συμπλεκτικών απεικονίσεων [7, 8, 9] και Χαμιλτονιανών συστημάτων 2 και 3 βαθμών ελευθερίας [8, 9, 10, 11]. Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι ο δείκτης SALI διακρίνει σαφώς μεταξύ χασοτικής και

οργανωμένης συμπεριφοράς πολύ γρηγορότερα από ότι για παράδειγμα ο κλασικός υπολογισμός του μέγιστου χαρακτηριστικού εκθέτη Lyapunov. Συγκεκριμένα ο δείκτης SALI παραμένει διάφορος του μηδενός παρουσιάζοντας μικρές διακυμάνσεις για οργανωμένες τροχιές [10], ενώ τείνει εκθετικά στο μηδέν για χαοτικές τροχιές [11], φτάνοντας πολύ συχνά σε τιμές στα όρια ακρίβειας του υπολογιστή (10^{-16}) οπότε και επιβεβαιώνεται πρακτικά η χαοτική συμπεριφοράς της τροχιάς, πέρα από κάθε αμφιβολία.



Σχήμα 1. Μέρος του ομοκλικού πλέγματος του σαγματικού σημείου (0,0) της απεικόνισης (12) για $C(1)=3$. Τα σημεία τομής της ευσταθούς (συνεχής γραμμή) και ασταθούς (διακεκομμένη γραμμή) πολλαπλότητας αντιστοιχούν σε δυο διαφορετικές πνοές και σχεδιάζονται με διαφορετικά χρώματα (μαύρες και γκρι κουκίδες).



Σχήμα 2. Κατανομή στο μιγαδικό επίπεδο των ιδιοτιμών του μονόδρομου πίνακα της διακριτής πνοής (α) σε πλέγμα 21 σωματιδίων με $C(1)=8$ και $K=2$, για τις ακόλουθες τιμές της παραμέτρου σύζευξης a : (β) $a=0,015$, (γ) $a=0,05$ και (δ) $a=0,1$. Σημειώνουμε ότι μιγαδική αστάθεια εμφανίζεται για $a \geq 0,05$.

Για τον υπολογισμό του δείκτη SALI μιας τροχιάς ενός δυναμικού συστήματος ακολουθούμε τη χρονική εξέλιξη της τροχιάς καθώς και δυο διανυσμάτων εκτροπής w_1 και w_2 από αυτή, η χρονική εξέλιξη των οποίων διέπεται από τις εξισώσεις μεταβολών του συστήματος. Σε

κάθε χρονικό βήμα N^* τα διανύσματα $w_1(N^*)$ και $w_2(N^*)$ κανονικοποιούνται ώστε να γίνουν μοναδιαία, ενώ ο δείκτης SALI υπολογίζεται ως:

$$SALI(N^*) = \min \left\{ \left\| \frac{w_1(N^*)}{\|w_1(N^*)\|} + \frac{w_2(N^*)}{\|w_2(N^*)\|} \right\|, \left\| \frac{w_1(N^*)}{\|w_1(N^*)\|} - \frac{w_2(N^*)}{\|w_2(N^*)\|} \right\| \right\}, \quad (13)$$

Για να σχηματίσουμε μια πρώτη ιδέα του πόσο εύκολα ή δύσκολα διατηρείται η οργανωμένη συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος (1) στις περιπτώσεις του “μαλακού” και “σκληρού ελατηρίου” γύρω από ευσταθείς πνοές, εξελίσσουμε διάφορες τροχιές οι αρχικές συνθήκες των οποίων διαφέρουν από τις ακριβείς αρχικές συνθήκες των ευσταθών πνοών μόνο ως προς τη θέση u_0 του κεντρικού σωματιδίου κατά Δu_0 . Για τις διάφορες τιμές της μεταβολής Δu_0 ο δείκτης SALI μας πληροφορεί για την χαοτική ή οργανωμένη συμπεριφορά της λύσης (Σχ. 3). **Γενικά είδαμε ότι στην περίπτωση του “σκληρού ελατηρίου” οι περιοχές οργανωμένης κίνησης γύρω από ευσταθείς πνοές είναι ‘μεγαλύτερες’ από ότι στην περίπτωση του “μαλακού ελατηρίου” αφού οδηγούμαστε σε χαοτική συμπεριφορά για μεγαλύτερες τιμές της μεταβολής Δu_0 [12].**

Τα βασικά συμπεράσματα της μελέτης της τοπικής και ολικής ευστάθειας των πνοών σε σύστημα “μαλακού” και “σκληρού” ελατηρίου, συνοψίζονται ως εξής (για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία [12]):

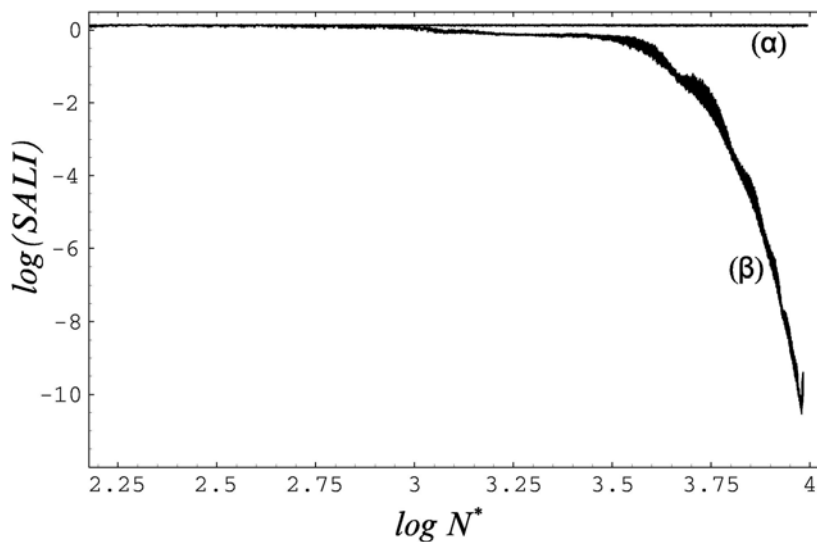
Στις περισσότερες περιπτώσεις, καθώς η παράμετρος σύζευξης a αυξάνει, οι διακριτές πνοές σε σύστημα “μαλακού ελατηρίου” υφίστανται **μετάπτωση μιγαδικής αστάθειας** (Σχ. 2γ). Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι αυτή η μετάπτωση αστάθειας σε αντίθεση με άλλες διακλαδώσεις (π.χ. διπλασιασμού περιόδου), σημαίνει τον τερματισμό της οικογένειας των περιοδικών λύσεων, καθώς δεν συνοδεύεται με τη ταυτόχρονη εμφάνιση άλλων ευσταθών λύσεων [20].

Σε αντίθεση με τη περίπτωση του “σκληρού ελατηρίου”, όταν ακολουθούμε καμπύλες του παραμετρικού χώρου (a, K, ω) , που ορίζονται από την συνάρτηση:

$$G(a, K, \omega) = - \left(2 + \frac{K - \omega^2}{a} \right) = \text{σταθερό} \quad (14)$$

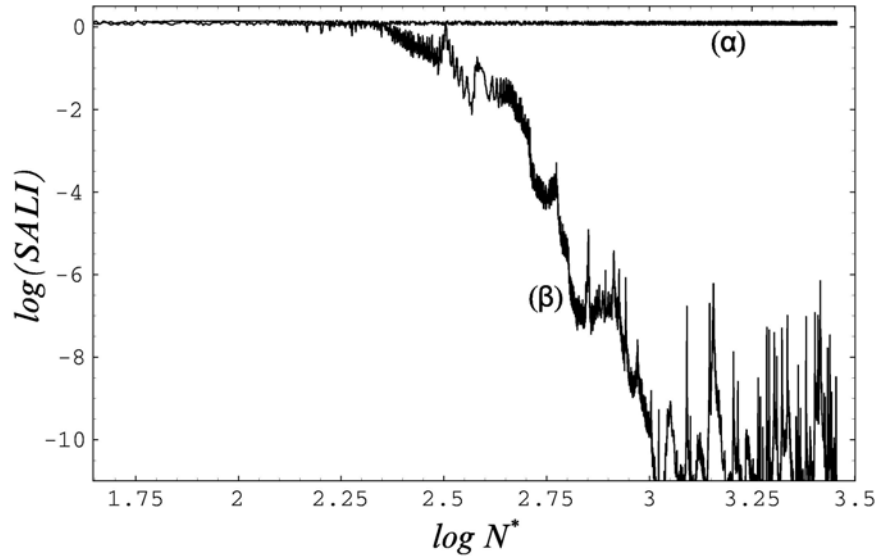
οι διακριτές πνοές για σύστημα “μαλακού ελατηρίου” δεν διατηρούν το πλήθος των ιδιοτιμών του μονόδρομου πίνακα με μέτρο διάφορο της μονάδας. Στο Σχ. 2 (β) - (δ) έχουμε σχεδιάσει τη κατανομή των ιδιοτιμών του μονόδρομου πίνακα μιας διακριτής πνοής “μαλακού ελατηρίου” για διάφορες τιμές της παραμέτρου σύζευξης a , κρατώντας σταθερές τις τιμές των $C(1)$ και K .

Σε σύστημα με “σκληρά ελατήρια” δεν εμφανίζεται μετάπτωση μιγαδικής αστάθειας, καθώς οι πνοές γίνονται ασταθείς μόνον με διαχωρισμό του ζευγαριού των ιδιοτιμών στο +1 και επί του πραγματικού άξονα. Επίσης υπάρχουν καμπύλες του παραμετρικού χώρου (a, K, ω) , που ορίζονται προσεγγιστικά από την Εξ. (14), κατά μήκος των οποίων ο αριθμός των ιδιοτιμών του μονόδρομου πίνακα που βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο είναι σταθερός και έτσι οι πνοές διατηρούν τον χαρακτήρα της ευστάθειάς τους.



Σχήμα 3. Μεταβολή του λογαρίθμου του δείκτη SALI συναρτήσει του λογαρίθμου του αριθμού N^* των χρονικών βημάτων της εξέλιξης (α) μιας ευσταθούς πνοής με εντοπισμένη ταλάντωση στο κεντρικό πλεγματοειδές σημείο πλέγματος 21 σωματιδίων και δυναμικό “σκληρού ελατηρίου” για $C(1)=8$, $a=0,15275$, $K=2$ και (β) της χαοτικής λύσης για διαταραχή $\Delta u_0=1.9$ της αρχικής συνθήκης του κεντρικού σωματιδίου.

Όπως δείχνουν τα παραπάνω αποτελέσματα, **οι περιοχές ευστάθειας των διακριτών πνοών των “σκληρών” ελατηρίων φαίνεται ότι είναι πολύ μεγαλύτερες από εκείνες των “μαλακών”.** Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τα Σχήματα 3 και 4 βλέπουμε ότι το μεσαίο σωματίδιο χρειάστηκε να μετατοπισθεί κατά $\Delta u_0=1.9$ από την θέση του για να αποσταθεροποιηθεί η λύση διακριτής πνοής, ενώ η αντίστοιχη μετατόπιση για τα “μαλακά” ελατήρια ήταν $\Delta u_0=0.2207$. Οι διαφορετικές αυτές **δυναμικές ιδιότητες** των εντοπισμένων ταλαντώσεων των ως άνω περιπτώσεων πρέπει να διερευνηθούν περισσότερο, ακριβώς επειδή μπορεί να υποδηλούν διαφορετικές **φυσικές ιδιότητες** των πλεγμάτων “σκληρών” και “μαλακών” ελατηρίων, οι οποίες ίσως να μπορούν να επιβεβαιωθούν και **πειραματικά**.



Σχήμα 4. Η διπλά λογαριθμική μεταβολή του SALI ως προς τον αριθμό N^* των χρονικών βημάτων της εξέλιξης της ευσταθούς πνοής με εντοπισμένη ταλάντωση στο κεντρικό πλεγματοειδές σημείο πλέγματος 21 σωματιδίων και δυναμικό “μαλακού” ελατηρίου, για $C(1)=8$, $a=0,15275$, $K=2$ (καμπύλη (α)) και για την ίδια λύση όταν πια έχει αποσταθεροποιηθεί μετά από διαταραχή $\Delta u_0=0,2207$ της αρχικής θέσης του κεντρικού σωματιδίου (καμπύλη (β)).

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τον καθηγητή κ. Α. Βακάκη και τον Δρ. J. Bergamin για τα χρήσιμα σχόλια τους σχετικά με το θέμα της παρούσας εργασίας. Ο Χ. Σκόκος ενισχύθηκε οικονομικά από το Πανεπιστήμιο Πατρών στο πλαίσιο της μεταδιδακτορικής υποτροφίας ‘Καραθεοδωρή’ No. 2794.

Αναφορές

- [1] Flach, S., and Willis, C.R., 1998, “Discrete Breathers”, *Physics Reports*, **295**, 181.
- [2] Hennig, D., and Tsironis, G., 1999, “Wave Transmission in Nonlinear Lattices”, *Physics Reports*, **307**, 333.
- [3] Trias, E., Mazo, J. J., and Orlando, T. P., 2000, “Discrete Breathers in Nonlinear Lattices: Experimental Detection in a Josephson Array”, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 741.
- [4] Binder, P., Abraimov, D., Ustinov, A. V., Flach, S., and Zolotaryuk, Y., 2000, “Observation of Breathers in Josephson Ladders”, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 745.
- [5] Eisenberg, H. S., Silberberg, Y., Morandotti, R., Boyd, A. R., and Aitchison, J. S., 1998, “Discrete Spatial Optical Solitons in Waveguide Arrays”, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3383.
- [6] Swanson, B. I., Brozik, J.A., Love, S.P., Strouse, G.F., Shreve, A. P., Bishop, A. R., Wang, W.-Z., and Salkola, M. I., 1999, “Observation of intrinsically localized modes in a discrete low-dimensional material”, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3288.
- [7] Skokos, Ch., 2001, “Alignment indices: A new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits”, *J. Phys. A*, **34**, 10029.
- [8] Skokos, Ch., Antonopoulos, Ch., Bountis, T. C., and Vrahatis, M. N., 2002, “Smaller alignment index (SALI): Detecting order and chaos in conservative dynamical systems” in “Proceedings of the 4th GRACM Congress on Computational Mechanics”, ed. Tsahalis D. T., Vol. IV, 1496.
- [9] Skokos, Ch., Antonopoulos, Ch., Bountis, T. C., and Vrahatis, M. N., 2003, “Smaller alignment index (SALI): Determining the ordered or chaotic nature of orbits in conservative dynamical system” in “Proceedings of the Conference Libration Point Orbits and Applications”, eds. Gómez G., Lo M. W. & Masdemont J. J., World Scientific, 653.
- [10] Skokos, Ch., Antonopoulos, Ch., Bountis, T. C., and Vrahatis, M. N., 2003, “How does the Smaller Alignment Index (SALI) distinguish order from chaos?”, *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **150**, 439.
- [11] Skokos, Ch., Antonopoulos, Ch., Bountis, T. C., and Vrahatis, M. N., 2003, “Detecting order and chaos in Hamiltonian systems by the SALI method” (submitted).
- [12] Panagopoulos, P., Bountis, T., Skokos, Ch., 2003, “Existence and Stability of Localized Oscillations in 1-Dimensional Lattices with Soft Spring and Hard Spring Potentials”, *Journal of Vibration and Acoustics*, (in press).
- [13] MacKay, R. S., and Aubry, S., “Proof of Existence of Breathers in Time-Reversible or Hamiltonian Networks of Weakly Coupled Oscillators”, 1994, *Nonlinearity*, **7**, 1623.
- [14] Bambusi, D., 1996, “Exponential Stability of Breathers in Hamiltonian Networks of Weakly Coupled Oscillators”, *Nonlinearity*, **9**, 433.
- [15] Aubry, S., “Breathers in Nonlinear Lattices: Existence, Stability and Quantization”, 1997, *Physica D*, **108**, 201.
- [16] Bountis, T., Capel, H.W., Kollmann, M., Ross, J., Bergamin, J.M., and van der Weele, J.P., 2000, “Multibreathers and Homoclinic Orbits in 1-Dimensional nonlinear Lattices”, *Phys. Lett. A*, **268**, 50.
- [17] Bergamin, J.M., Bountis, T., and Vrahatis, M.N., 2002, “Homoclinic Orbits of Invertible Maps” *Nonlinearity*, **15**, 1603.

[18] Bountis, T., Bergamin, J.M., and Basios, V., 2002, “Stabilization of Discrete Breathers Using Continuous Feedback Control”, Phys. Lett. A, **295**, 115.

[19] Bergamin, J.M., 2003, “Numerical Approximation of Breathers in Lattices with Nearest-Neighbor Interactions”, Phys. Rev. E, **67**, electronic page number 026703.

[20] Contopoulos, G., 1986, “Bifurcations in systems of three degrees of freedom”, Celest. Mech., **38**, 1.